



گزینه ۳

۱

نقطه‌ای به طول $x = 1$ علاوه بر اینکه روی نمودار $f(x)$ قرار دارد، روی خط $y = 3x + 1$ نیز قرار می‌گیرد. بنابراین با صدق دادن $x = 1$ در معادله خط، می‌توانیم مختصات نقطه تماس را به دست آوریم:

$$x = 1 \xrightarrow{y=3x+1} y = 3(1) + 1 = 4 \Rightarrow (1, 4) \text{ نقطه تماس}$$

حال مختصات نقطه تماس را در معادله $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{x=1, f(x)=4} 4 = (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + 2$$

$$\Rightarrow 4 = a + b + 3 \Rightarrow a + b = 1$$

از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نقطه تماس، معادل مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ است. بنابراین داریم:
(شیب خط $y = 3x + 1$ برابر با $m = 3$ است یعنی $f'(1) = 3$)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\xrightarrow{f'(1)=3} 3 = 3(1)^2 + 2a(1) + b \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\xrightarrow{a+b=1} a + (-2a) = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = -1 - 2 = -3$$

گزینه ۳

۲

اگر تابعی درجه دوم باشد، آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[a, b]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{a+b}{2}$ برابر است؛ پس سرعت متوسط این متحرک در بازه $[1, 5]$ با سرعت لحظه‌ای آن در $x = \frac{1+5}{2} = 3$ برابر است.

مقدار فروش در نیمه ابتدایی ماه ششم از ۹۰/۰۰۰ به ۱۱۰/۰۰۰ رسیده است ولی در نیمه دوم این ماه از ۱۱۰/۰۰۰ به ۱۴۰/۰۰۰ رسیده است؛ پس آهنگ متوسط فروش در نیمه ابتدایی ماه ششم از نیمه دوم این ماه کمتر است. بیشترین فروش در ابتدای ماه هفتم با ۱۴۰/۰۰۰ فروش است. بیشترین تغییر تعداد کالای فروخته شده در ماه ششم است، پس بیشترین آهنگ فروش متعلق به ماه ششم است. آهنگ متوسط فروش از ابتدای ماه سوم تا پایان ماه هفتم برابر است با:

$$\frac{y(7) - y(3)}{7 - 3} = \frac{110000 - 70000}{4} = \frac{40000}{4} = 10000$$

پس گزینه ۳ پاسخ تست است.

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(x^3 - 1)}^{\text{عامل صفر}} \overbrace{(\sqrt[3]{x} + x)}^{\text{مابقی عوامل}}}{\underbrace{x\sqrt{x} - 1}_{x^{\frac{1}{2}}}} \xrightarrow[\text{HOP}]{\text{ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{3x^2}^{\text{مشتق}} \overbrace{(\sqrt[3]{x} + x)}^{\text{مابقی عوامل}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3 \times 2}{\frac{3}{2}} = 4$$

روش دوم: باتوجه به نکته زیر، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^{\frac{3}{2}} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} + x) \xrightarrow[n=\frac{3}{2}]{m=3} \frac{3}{\frac{3}{2}} \times 2 = 4$$

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ و f در $x = a$ پیوسته باشد، در این صورت $x = a$ را مماس قائم تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم. پس باید دنبال تابعی باشیم که در یکی از نقاط دامنه‌اش، دارای مشتق بی‌نهایت است. این اتفاق فقط برای تابع گزینه "۲" در $x = -1$ می‌افتد:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty$$

ضمناً این تابع در $x = -1$ پیوسته است، پس این تابع در $x = -1$ دارای خط مماس قائم است.

برای موجود بودن مشتق راست در نقطه $x = 1$ ، اولین شرط پیوستگی راست تابع f در این نقطه است. داریم:

$$\xrightarrow{\text{حد راست=مقدار}} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt{1+a+b} = 3$$

$$\Rightarrow 1+a+b = 9 \Rightarrow a+b = 8$$

حال با مشتق‌گیری از ضابطه $\sqrt{x^2+ax+b}$ و جایگذاری $x = 1$ ، باتوجه به مقدار مشتق راست، داریم:

$$(\sqrt{x^2+ax+b})' = \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}} \underset{f'_+(1)}{=} \frac{2+a}{2\sqrt{1+\underbrace{a+b}_8}} = 1 \Rightarrow \frac{2+a}{2\sqrt{9}} = 1 \Rightarrow a+2 = 6 \Rightarrow a = 4$$

حال باتوجه به رابطه $a+b = 8$ ، نیز برابر با ۴ است. درنهایت داریم:

$$a+2b = 4+2(4) = 4+8 = 12$$

ابتدا تعریف مشتق داده شده در صورت مسئله را به شکل مرتب می‌نویسیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \omega h) - f(1)}{-\omega h} \times \frac{-\omega}{2} = 4 \Rightarrow -\frac{\omega}{2} f'(1) = 4 \Rightarrow f'(1) = -\frac{8}{\omega}$$

حال می‌توانیم معادله خط مماس بر منحنی را بنویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{8}{\omega}(x - 1) \\ \Rightarrow y = -\frac{8}{\omega}x + \frac{8}{\omega} + 2 \Rightarrow y = -\frac{8}{\omega}x + \frac{18}{\omega}$$

نقطه A محل برخورد خط فوق با محور xها است، پس:

$$0 = -\frac{8}{\omega}x + \frac{18}{\omega} \Rightarrow \frac{8}{\omega}x = \frac{18}{\omega} \Rightarrow x = \frac{18}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

نقطه $A\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \omega \xrightarrow{\text{پس } x=1 \text{ ریشه صورت است}} f(1) = 0$$

می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \omega \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \omega$$

حالا از تابع $f(x - f(x))$ مشتق می‌گیریم:

$$(f(x - f(x)))' = (x - f(x))' \times f'(x - f(x)) = (1 - f'(x)) \times f'(x - f(x))$$

$$\xrightarrow{x=1} (1 - f'(1)) \times f'(1 - f(1)) = (1 - \omega) \times f'(1 - 0) = -4f'(1) = -4(\omega) = -20$$

نکته: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنگ لحظه‌ای تابع f در نقطه x_0 ، همان مشتق تابع f در x_0 است.

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x_0 = f'(x_0)$$

پس در تابع $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-\frac{2}{3}, 2]$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(-\frac{2}{3})}{2 - (-\frac{2}{3})} = \frac{1 - (-\frac{23}{3})}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{24}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{24}{8} = 3$$

حال برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای، مشتق تابع f (تابع هموگرافیک) را به کمک قاعده مشتق حساب می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{(x + 1)^2}$$

چون در متن مسئله، آهنگ متوسط در بازه $[-\frac{2}{3}, 2]$ برابر با آهنگ لحظه‌ای می‌باشد، پس کافی است مشتق تابع را برابر ۹ قرار دهیم. داریم:

$$f'(x) = 9 \Rightarrow \frac{9}{(x + 1)^2} = 9 \Rightarrow (x + 1)^2 = 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \begin{cases} x = 0 & \checkmark \\ x = -2 & \times \end{cases}$$

نکته: اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + mh) - f(a + nh)}{h} = (m - n)f'(a)$$

بنابراین در این سؤال داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + 3h) - f(-2 - h)}{h} = 3f'(-2)$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = (-2) - 2 = -4$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت موردنظر} = 3(-4) = -12$$

$$f(۳) = (۹ - ۱۵ + ۶)g(۳) = ۰ \times g(۳) = ۰$$

$$\begin{aligned} f'(۳) &= \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{(x^۲ - ۵x + ۶)g(x) - ۰}{x - ۳} \\ &= \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{(x - ۲)(x - ۳)g(x)}{x - ۳} \times \lim_{x \rightarrow ۳} g(x) = (۳ - ۲) \times ۲ = ۲ \end{aligned}$$

فرض کنیم خط مماس در نقطه $A(x_1, \frac{k}{x_1})$ بر نمودار تابع $y = \frac{k}{x}$ مماس شده است. برای محاسبه شیب خط مماس در A باید از تابع مشتق بگیریم:

$$y' = -\frac{k}{x^۲} \xrightarrow{x=x_1} y' = -\frac{k}{x_1^۲}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{k}{x_1} = -\frac{k}{x_1^۲}(x - x_1)$$

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y - \frac{k}{x_1} = \frac{k}{x_1} \Rightarrow y = \frac{۲k}{x_1} \Rightarrow A \left| \begin{smallmatrix} ۰ \\ \frac{۲k}{x_1} \end{smallmatrix} \right. \\ y = ۰ \Rightarrow \frac{k}{x_1} = -\frac{k}{x_1^۲}(x - x_1) \Rightarrow x = ۲x_1 \Rightarrow B \left| \begin{smallmatrix} ۲x_1 \\ ۰ \end{smallmatrix} \right. \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{۲}OA \times OB = \frac{1}{۲} \times \frac{۲k}{x_1} \times ۲x_1 = ۲k$$

شکل تابع به صورت $\sqrt{u}$ است که در آن $u = ۲ - \sqrt{\frac{۳}{x+۲}}$ می‌باشد. حال مشتق این تابع را با رابطه $\frac{1}{۲\sqrt{u}} \cdot u'$ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\xrightarrow{y' = \frac{1}{۲\sqrt{u}} u'} y' = \frac{1}{۲\sqrt{2 - \sqrt{\frac{۳}{x+۲}}}} \times \left(۰ - \frac{1}{۲\sqrt{\frac{۳}{x+۲}}} \times \left(\frac{-۳}{(x+۲)^۲} \right) \right)$$

درنهایت با جایگذاری $x = ۱$ ، داریم:

$$y'(1) = \frac{1}{۲\sqrt{1}} \cdot \left(-\frac{1}{۲\sqrt{1}} \times \frac{-۳}{۹} \right) = \frac{1}{۲} \times \frac{۳}{۱۸} = \frac{1}{۲} \times \frac{1}{۶} = \frac{1}{۱۲}$$

تابع f در $x = 2$ و $x = -2$ پیوسته است، پس می‌توانیم بدون تعریف، مقدار مشتق‌های خواسته‌شده را حساب کنیم.

ضابطه f را در 2^+ بدون براکت و قدر مطلق می‌نویسیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'_+(2) = ([\epsilon^+]|x - 4|)' = (\epsilon(x^2 - 4))' = \epsilon(2x) \xrightarrow{x=2^+} 2\epsilon$$

↓
مثبت

ضابطه f را در $(-2)^-$ بدون براکت و قدر مطلق می‌نویسیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'_-(-2) = ([-\epsilon^-]|x^2 - 4|)' = (-\gamma(x^2 - 4))' = -\gamma(2x) \xrightarrow{x=-2^-} 2\gamma$$

↓
مثبت

بنابراین حاصل $f'_+(2) - f'_-(-2)$ برابر است با:

$$f'_+(2) - f'_-(-2) = 2\epsilon - 2\gamma = -4$$

نکته:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

باتوجه به نکته بالا از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$f(x + 2\sqrt{x}) = x^3 + x \Rightarrow (x + 2\sqrt{x})' f'(x + 2\sqrt{x}) = 3x^2 + 1$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) f'(x + 2\sqrt{x}) = 3x^2 + 1$$

برای آنکه $f'(3)$ تولید شود باید $x + 2\sqrt{x} = 3$ باشد:

$$x + 2\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس در تساوی داده‌شده $x = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) f'(x + 2\sqrt{x}) = 3x^2 + 1 \xrightarrow{x=1} 2f'(3) = 4 \Rightarrow f'(3) = 2$$

پس شیب خط مماس بر تابع f در $x = 3$ برابر ۲ است.

باتوجه به ضابطه $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)$ و مشتق تابع مرکب، داریم:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= (5x^2 - 6x + 1)' \Rightarrow \left(f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)\right)' \\&= 10x - 6 \Rightarrow \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)' \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 10x - 6 \\&\Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{x}^3} \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 10x - 6\end{aligned}$$

چون $f'(2)$ مطلوب می‌باشد، کافی است به جای $\frac{x + \sqrt{x}}{x}$ ، ۲ بگذاریم یعنی معادله $\frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2$ را حل کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\&\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

حال با قرار دادن $x = 1$ ، در رابطه قبل داریم:

$$\frac{-1}{2\sqrt{1}^3} \times f'(2) = 10(1) - 6 \Rightarrow -\frac{1}{2}f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = -8$$

در بازه $(-3, -2)$: عرض نقاط مثبت و شیب خط مماس مثبت است.

در بازه $(-2, 0)$: عرض نقاط مثبت و شیب خط مماس منفی است.

در بازه $(0, 2)$: عرض نقاط منفی و شیب خط مماس نیز منفی است.

در بازه $(2, 4)$: عرض نقاط منفی و شیب خط مماس مثبت است.

در بازه $(4, 7)$: عرض نقاط مثبت و شیب خط مماس مثبت است.

در بازه $(7, 11)$: عرض نقاط مثبت و شیب خط مماس منفی است.

در نقاط به طول ۲ و ۷ شیب خط مماس صفر و در نقاط به طول ۰ و ۴ عرض نقطه صفر است.

پس بازه‌های $(-2, 0)$ و $(2, 4)$ و $(7, 11)$ قابل قبول هستند و نقاط به طول صحیح عبارت‌اند از:

$$a \in \{-1, 3, 8, 9, 10\}$$

پس a دارای جواب ۵ است.

می‌دانیم شیب خط مماس رسم‌شده روی تابع $f(x)$ برابر $f'(1)$ است. از طرفی شیب خط رسم‌شده برابر تانژانت زاویه‌ای است که با قسمت مثبت محور x ‌ها می‌سازد. پس داریم:

$$f'(1) = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$

از طرف دیگر سؤال از ما حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1}$ را می‌خواهد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 2)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} \times (\sqrt{x} + 1) = f'(1) \times (1 + 1) = -1 \times 2 = -2$$

ابتدا به کمک روابط محاسبه مشتق برای $(\frac{h}{g})'(x)$ ، مشتق تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس به جای متغیر عدد (-1) را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^3 - 4x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^3 - 4x + 5) - (2x^2)(x^3 - 4x + 5)'}{(x^3 - 4x + 5)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x)(x^3 - 4x + 5) - (2x^2)(3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x + 5)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \frac{-4((-1)^3 + 4 + 5) - (2)(3 - 4)}{((-1)^3 + 4 + 5)^2} = \frac{-32 + 2}{(8)^2} = -\frac{30}{64} = -\frac{15}{32}$$

باتوجه به اینکه مقدار زاویه بین خط مماس و جهت مثبت محور x ها را از ما خواسته، بنابراین باید شیب خط مماس را در نقطه خواسته شده (مشتق تابع در نقطه) را به دست آوریم. در ابتدا:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{باتوجه به رابطه}} f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

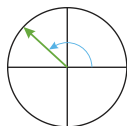
$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

می‌دانیم که شیب یک خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، برابر است:

$$\Rightarrow \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ یا } \frac{7\pi}{6}$$

طبق گزینه های موجود: $\theta = \frac{5\pi}{6}$



$$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

به جای $\sqrt[3]{x^2}$ ، عبارت $x^{\frac{2}{3}}$ را جایگذاری کرده و مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = 1 \times x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \times \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f'(8) = (2^3)^{\frac{2}{3}} + \frac{2(8-1)}{3\sqrt[3]{2^3}} = 4 + \frac{14}{3 \times 2} = 4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}$$

حد داده شده را کمی ساده تر می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2) - f(x)}{x^2 + 2x - 8} = \frac{4}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(f(x) - f(2))}{(x-2)(x+4)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{-1}{x+4} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f'(2) \times \frac{-1}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = -8$$

حال با داشتن ضابطه f ، مقدار $f'(2)$ را حساب می کنیم:

$$f(x) = ax^2 \sqrt[3]{3x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = 2ax \sqrt[3]{3x^2 - 4} + ax^2 \frac{6x}{3 \sqrt[3]{(3x^2 - 4)^2}}$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = 8a + 4a = 12a \xrightarrow{f'(2)=-8} 12a = -8 \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

چون $f'(3) = 2$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \overbrace{f(3)}^4}{x-3} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x-3} = 2$$

حد داده شده را ساده تر می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{16 - f^2(x)}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(f(x) - 4)(f(x) + 4)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(f(x) + 4)}{x+1} = 2 \times \frac{-(f(3) + 4)}{3+1} = 2 \times \frac{-8}{4} = -4$$

$$y = g \circ f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x)) \xrightarrow{x=1} f'(1) \times g'(f(1))$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1-0}{(x+1)^2} \times 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{4} \times 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

به علاوه $f(1) = \frac{1}{8}$ است، پس ما $g'(f(1)) = g'\left(\frac{1}{8}\right)$ را نیز می خواهیم. باتوجه به شکل $g'\left(\frac{1}{8}\right) = 4$ است.

$$f'(1) \times g'(f(1)) = \frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$$

می‌دانیم که حجم کره‌ای به شعاع r برابر با $\frac{4}{3}\pi r^3$ است؛ پس:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow V'(r) = \frac{4}{3} \times 3 \times \pi r^2 = 4\pi r^2 = \text{مشتق}$$

$$V'\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 4\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 = 4\pi \times \frac{2}{\pi} = 8$$

باتوجه به سؤال و ناپیوستگی $[x]$ در $x = 1, 3$ باید:

$$2x^3 + mx^2 + 2nx + h = 2(x-1)(x-3)^2 = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 18$$

$$m = -14$$

$$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow 15 - (-14) + (-18) = 11$$

$$h = -18$$

می‌دانیم در تابع درجه دوم مقدار مشتق در رأس سهمی صفر است و چون عرض این نقطه هم صفر شده است، یعنی سهمی بر محور طول‌ها مماس است و طول رأس آن $2b - 1$ است؛ پس:

$$x^2 + ax + b = (x - (2b - 1))^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2b - 1)^2 = b \Rightarrow 4b^2 - 4b + 1 = b \Rightarrow 4b^2 - 5b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \\ a = -2(2b - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \Rightarrow a = -2 \\ b = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر ممکن برای } a = -2 + 1 = -1$$

روش اول:

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

سپس مقادیر مشتق تابع f را در نقاط 1^- ، $(-1)^+$ و صفر پیدا می‌کنیم:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-|x|} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1-|x|} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-1}{2}$$

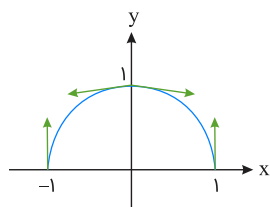
$$f'_-(0) = \frac{1}{2} \text{ : به همین ترتیب}$$

در نتیجه گزینه ۴ درست است.

تذکر: به جای استفاده از فرمول تعریف مشتق، می‌توان از طریق مشتق‌گیری از توابع هم به نتایج بالا رسید.

روش دوم:

از طریق رسم شکل تابع به راحتی می‌توان نمودار مشتق را رسم کرد:



$$f'_+(-1) \rightarrow +\infty, \quad f'_-(1) \rightarrow -\infty$$

می‌دانیم تابع در $x = \pm 1$ مماس قائم دارد. چون تابع بعد از -1 صعودی است، پس $f'_+(-1) \rightarrow +\infty$ و چون قبل از 1 نزولی است، داریم $f'_-(1) \rightarrow -\infty$. از روی شکل معلوم است که $f'_+(0) < 0$ و $f'_-(0) > 0$ ؛ پس گزینه ۴ درست است.

راه حل اول:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\omega h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\omega h) - f(3) + f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3-2h) - f(3)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3-\omega h) - f(3)}{h} \right)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h}$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$-2h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{2} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{-\frac{t}{2}} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{t} = -2f'(3)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-\omega h) - f(3)}{h}$ نیز به روش بالا عمل می‌کنیم:

$$-\omega h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{\omega} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-\omega h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{-\frac{t}{\omega}} = -\omega \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{t} = -\omega f'(3)$$

پس حالا عبارت داده شده برابر است با:

$$-2f'(3) - (-\omega f'(3)) = 3f'(3) = 3 \times 4 = 12$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\omega h)}{h} = \left(\frac{-2 - (-\omega)}{1} \right) f'(3) = 3f'(3) = 12$$

مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow 5 = \frac{5 \times OB}{2} \Rightarrow OB = 2$$

پس مختصات نقاط A و B برابر است با:

$$A(5, 0), B(0, 2)$$

شیب خط AB برابر است با:

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 5} = -\frac{2}{5}$$

که برابر است با مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ یعنی: $f'(2) = -\frac{2}{5}$
برای محاسبه حد خواسته شده آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 - 3h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - 3h) - f(2)}{-3h} \times \frac{-(-3)}{3} = \frac{3}{3} f'(2) \\ &= \frac{3}{3} \times \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$